

A simulação no cálculo da incerteza da medição

MACHADO, Vicente¹

¹Departamento Acadêmico de Eletrônica
Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná - (CEFET-PR),
Av. Sete de Setembro, 3165 – CEP 80230-901
Fone: +55 41 310-4616, Fax: +55 41 310-4787
vmachado@cefetpr.br - <http://planeta.terra.com.br/educacao/machado>

Resumo – Este artigo faz uma comparação entre a forma tradicional de cálculo de incertezas de medição, segundo o Guia para Expressão da Incerteza de Medição [1] (tradução do ISO–GUM-1993) e a simulação matemática. O artigo toma por base um exemplo prático de cálculo de incerteza em associações de resistores em paralelo e série. As simulações foram feitas utilizando o método de Monte Carlo através do software Weibull 6 da Reliasoft [2], com cálculos complementares pela planilha eletrônica Excel. O trabalho tem como objetivo verificar a validade dos cálculos de incerteza de medição, feitos segundo o Guia para Expressão da Incerteza de Medição em algumas situações práticas.

Palavras-chave: Metrologia, Incerteza de medição, Simulação matemática.

Abstract - This article makes a matching enters the traditional form of calculation of uncertainties in measurement, according to Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement [1] (translation of the ISO-GUM -1993) and the mathematical simulation. The article takes for base a practical example of calculation of uncertainty in associations of electrical resistances in parallel and series. The simulations had been made using Monte Carlo method through software Weibull 6 of the Reliasoft [2], with backing calculations for the electronic spread sheet Excel. The work has as objective to verify the validity of the calculations of uncertainty in measurement, made according to Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement in some practical situations.

Key-words: Metrology, Uncertainty in measurement, Mathematical simulation.

Introdução

Metrologia é a ciência da medição. Todas as medições estão afetadas por erros que podem ser provenientes do mensurando, do instrumento de medição e/ou de grandezas de influência externa.

Considerando que os erros não podem ser perfeitamente conhecidos, pode-se afirmar que o resultado da medição está afetado de uma incerteza.

Quando se relata o resultado da medição de uma grandeza física é obrigatório que, seja dada alguma indicação quantitativa da qualidade do resultado, de forma que aqueles que a utilizam possam avaliar sua confiabilidade. Sem essa indicação, resultados de medições não podem ser comparados, seja entre eles mesmos ou com valores de referência fornecidos numa especificação ou numa norma. É portanto, necessário que haja um procedimento prontamente implementado, facilmente compreendido e de aceitação geral, para caracterizar a qualidade de um resultado de uma medição, isso é, para avaliar e expressar sua incerteza.

Resta saber o quão exato é o cálculo da incerteza da medição, já que procedimentos padrões são utilizados [1], deixando muitas vezes

o metrologista na dúvida, se estes são a melhor forma de determinar a incerteza da medição.

A forma alternativa para cálculo da incerteza é através da simulação matemática. Consegue-se na simulação uma melhor compreensão da metodologia, e uma maior confiança nos resultados. Essa forma de cálculo ainda não é muito utilizada, devido à falta de sistemas computacionais que automatizem o processo de cálculo, bastante complexo para ser feito utilizando-se ferramentas dissociadas.

Fontes de incertezas

Em uma medição existem muitas fontes de incertezas, tais como [3]:

- Definição incompleta do mensurando;
- Amostras não representativas do mensurando;
- Condições ambientais não compensadas ou compensadas inadequadamente no resultado da medição;
- Erros de leitura cometidos pelo operador;
- Erros devido à resolução do instrumento;
- Valores inexatos de constantes e parâmetros utilizados na obtenção do resultado (tolerâncias);

- Aproximações e simplificações adotadas nos procedimentos de medição / calibração e ou ensaio;
- Variações registradas em repetidas medições do mensurando, obtidas sob mesmas condições.

Resultado de uma medição

Chama-se de resultado de uma medição o valor atribuído a um mensurando obtido por medição. Deve-se indicar claramente se o resultado refere-se ao resultado corrigido ou não e se corresponde ao valor médio de várias medições.

A Figura 1 mostra os efeitos que compõem o resultado de uma medição. Nota-se uma componente aleatória que utiliza métodos estatísticos na sua determinação e uma componente sistemática, que dependendo do caso pode ser corrigida. Na figura o resultado é indicado com um nível de confiança de 95%.

Resultado da medição (RM)

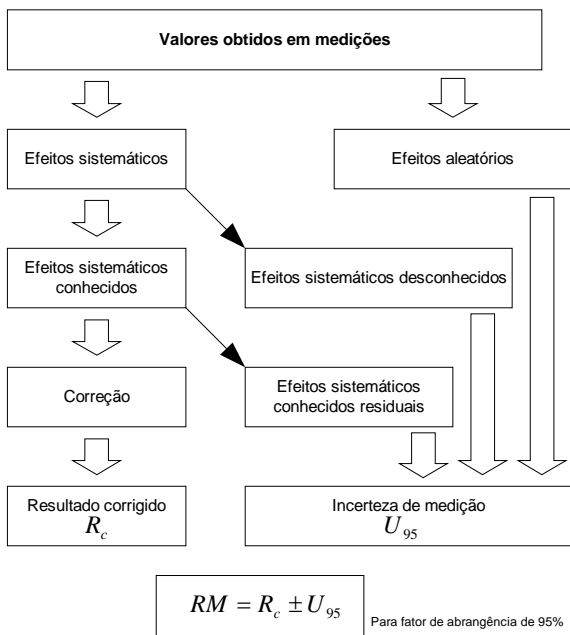


Figura 1 – Efeitos que determinam o resultado de uma medição [3].

A Figura 2 detalha mais as componentes do resultado de uma medição para um intervalo simétrico de incerteza.

Procedimento de cálculo da incerteza da medição

O procedimento para cálculo da incerteza da medição, segundo o “Guia para expressão da incerteza de medição” [1], envolve os seguintes passos:

$$RM = R_c \pm U$$

RM = resultado da medição;
 R_c = resultado corrigido;
 U = incerteza expandida;
 u_c = incerteza combinada;
 k = fator de abrangência
 ($k = 2 \rightarrow 95\%$ e $k = 3 \rightarrow 99\%$)

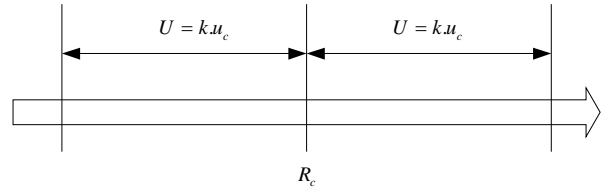


Figura 2 – Resultado da medição com intervalo simétrico de incerteza expandida [3].

- 1) Determinar o modelo matemático que relaciona a grandeza de entrada com a de saída, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- 2) Identificar todas as correções a serem feitas ao resultado da medição;
- 3) Listar componentes sistemáticos da incerteza associados a correções, e tratar os efeitos sistemáticos não corrigidos como parcelas de incerteza;
- 4) Atribuir valores de incertezas e distribuições de probabilidades, com base em conhecimentos experimentais práticos ou teóricos;
- 5) Calcular a incerteza padrão (u_i) para cada componente de incerteza;
- 6) Calcular a incerteza combinada (u_c);
- 7) Calcular a incerteza expandida (U).

Pode-se classificar os tipos de incertezas em:

- a) A incerteza Tipo A que é obtida por meios que envolvem a análise estatística de observações repetitivas do mensurando;
- b) A incerteza Tipo B obtida por meios que não envolvam a análise estatística, tais como: Certificados de calibração; Especificações dos instrumentos e padrões; Dados técnicos de fabricantes; Livros e manuais técnicos; e Estimativas baseadas na experiência.

A determinação da incerteza padrão combinada de medições diretas é obtida como sendo a raiz quadrada da soma quadrática das diversas incertezas padrão (u_i), não correlacionadas envolvidas no processo de medição, conforme equação 1.

$$u_c = \left[(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2 + \dots + (u_n)^2 \right]^{1/2} \quad (1)$$

Para o caso genérico em que todas as grandezas de entrada são independentes, ou não correlacionadas a incerteza padrão de y , onde y é a estimativa do mensurando Y , é obtida pela combinação apropriada de incertezas padrão das estimativas das entradas x_1, x_2, \dots, x_N . Essa incerteza padrão combinada da estimativa y é representada por $u_c(y)$, conforme a equação 2.

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) \quad (2)$$

As derivadas parciais $\partial f / \partial x_i$ são iguais a $\partial f / \partial X_i$ e avaliadas para $X_i = x_i$. Essas derivadas denominadas de coeficientes de sensibilidade, descrevem como a estimativa de saída varia, com alterações nos valores das estimativas das entradas x_1, x_2, \dots, x_N .

Quando as grandezas de entrada são correlacionadas a expressão apropriada para a variância combinada $u_c(y)$, associada com o resultado de uma medição é dada pela equação 3.

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \quad (3)$$

Estudo de Caso

Quer se determinar qual a incerteza da associação de resistores em paralelo e série. Como em qualquer componente, variações do processo produtivo impedem que os resistores sejam completamente iguais, tem-se assim as tolerâncias dos resistores, que são especificadas por meio de percentagens do valor nominal, entre as quais a resistência se encontra. Para o resistor utilizado, o fabricante especifica uma tolerância de $\pm 5\%$, não indicando qual a percentagem de abrangência desta tolerância.

Nesse estudo de caso para simplificação, vai-se considerar apenas as tolerâncias dos resistores como componente única da incerteza.

Fazendo-se 120 medições em resistores de 1 k ohm [4] (supondo-se medições ideais), determinou-se que os resistores obedeciam uma distribuição Normal, e apresentavam média de $\mu = 1003,5 \Omega$ e desvio padrão $\sigma = 8,9 \Omega$. Para efeito de simplificação da análise vai-se considerar associações de resistores, todos iguais a 1k ohm.

A Figura 3 mostra a distribuição de valores obtida das medições, que indicam um perfeito enquadramento à uma distribuição Normal.

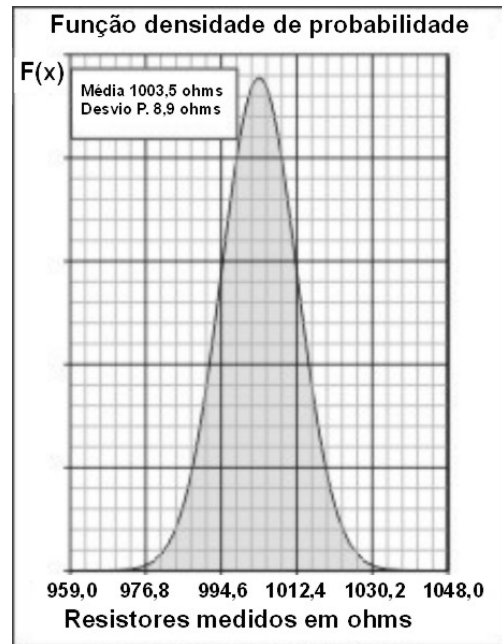


Figura 3 – Distribuição dos resistores de 1k ohm medidos.

Cálculo das incertezas de acordo com o guia

Para o caso da associação (série ou paralelo) dos resistores, tem-se que considerar como grandezas não correlacionadas, já que as tolerâncias dos resistores são independentes umas das outras. A fórmula para cálculo da associação de resistores em paralelo pode ser

simplificada para resistores iguais para $R_{eq} = \frac{R}{n}$,

sendo n o número de resistores em paralelo.

Para resistores em série $R_{eq} = n.R$.

A partir do desvio padrão pode-se calcular o desvio padrão experimental da média, dado pela equação 4 e calculado aproximadamente para o caso, conforme apresenta a equação 5.

$$s^2(\bar{q}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (4)$$

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{8,9}{\sqrt{120}} = 0,8 \Omega \quad (5)$$

Os cálculos das incertezas nas associações paralelo e série, considerando-se apenas as tolerâncias dos resistores, para várias associações de resistores podem ser vistos na Tabela 1.

Tabela 1 – Cálculo da incerteza na associação paralelo e série de resistores.

	Num de resistores	$\partial f / \partial x$	Cálculo da incerteza	Resultado da med. $RM = R_c \pm U_{68\%}$	Faixa de variação da resistência (68%)
Associação paralela	3	$1/3$	$\sqrt{3(0,8/3)^2}$	$(334,5 \pm 0,5)\Omega$	$(334,0 - 335,0)\Omega$
	10	$1/10$	$\sqrt{10(0,8/10)^2}$	$(100,4 \pm 0,3)\Omega$	$(100,1 - 100,6)\Omega$
	20	$1/20$	$\sqrt{20(0,8/20)^2}$	$(50,2 \pm 0,2)\Omega$	$(50,0 - 50,4)\Omega$
	100	$1/100$	$\sqrt{100(0,8/100)^2}$	$(10,0 \pm 0,1)\Omega$	$(10,0 - 10,1)\Omega$
Associação série	3	3	$\sqrt{3(3 \times 0,8)^2}$	$(3010,6 \pm 4,2)\Omega$	$(3006,4 - 3014,8)\Omega$
	10	10	$\sqrt{10(10 \times 0,8)^2}$	$(10035,3 \pm 25,7)\Omega$	$(10009,7 - 10061,0)\Omega$
	20	20	$\sqrt{20(20 \times 0,8)^2}$	$(20070,7 \pm 72,6)\Omega$	$(19998,1 - 20143,2)\Omega$
	100	100	$\sqrt{100(100 \times 0,8)^2}$	$(100353,3 \pm 811,2)\Omega$	$(99542,2 - 101164,5)\Omega$

Simulação matemática no cálculo das incertezas

Na simulação matemática das distribuições utilizou-se o método de Monte Carlo para a simulação dos 120 valores de acordo com uma distribuição Normal ($\mu = 1003,5\Omega$ e $\sigma = 0,8\Omega$). A geração dos valores foi feita pelo software Weibull 6 da Reliasoft [2], método de análise (MLE) máxima verossimilhança e cálculo das associações na planilha Excel.

Outras formas de geração de valores, de acordo com uma distribuição foram apresentados por Dodson [5]. Dodson propõe métodos de geração de valores utilizando-se planilhas eletrônicas tais como o Excel.

A simulação matemática para 3 resistores de 1 k ohm em paralelo apresentou média de 334,4 ohms e desvio padrão de 1,7 ohms. Assim o limite superior para 68 % de probabilidade ficou em 336,1 ohms e o inferior em 332,7 ohms. A Figura 4 mostra a distribuição de valores obtida.

A Tabela 2 apresenta as simulações para várias associações de resistores em paralelo e série com as respectivas incertezas obtidas.

A tabela apresenta também a variação dos

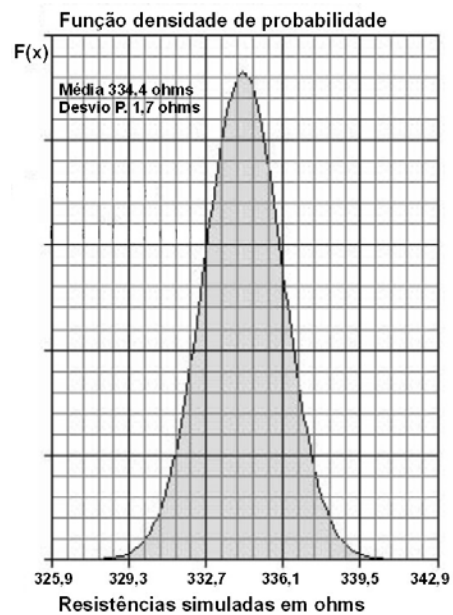


Figura 4 – Distribuição de valores de 3 resistores de 1 k Ohm em paralelo.

valores superior e inferior para abrangência de 68% considerando-se uma confiança de 90%.

Tabela 2 - Simulação de resistores em paralelo e série, método de Monte Carlo.

	Num de resistores	Média e desvio padrão Ω	Inter. de confiança 90%	Int. para abrangência de 68%			Num de resistores	Média e desvio padrão Ω	Inter. de confiança 90%	Int. para abrangência de 68%	
				Lim inf Ω	Lim sup					Lim inf Ω	Lim sup
Associação paralela	3	$\mu = 334,4$ $\sigma = 1,7$	Lim sup	333,0	336,5	Associação série	3	$\mu = 3010,1$ $\sigma = 15,5$	Lim sup	2997,5	3028,3
			Média	332,7	336,1				Média	2994,7	3025,4
			Lim inferior	332,4	335,8				Lim inferior	2991,8	3022,6
	10	$\mu = 100,3$ $\sigma = 0,3$	Lim sup	100,1	100,7		10	$\mu = 10036$ $\sigma = 24,6$	Lim sup	10016	10065
			Média	100,0	100,6				Média	10011	10060
			Lim inferior	100,0	100,6				Lim inferior	10007	10056
	20	$\mu = 50,2$ $\sigma = 0,1$	Lim sup	50,1	50,3		20	$\mu = 20069$ $\sigma = 36,3$	Lim sup	20040	20112
			Média	50,1	50,3				Média	20033	20105
			Lim inferior	50,1	50,2				Lim inferior	20026	20099
	100	$\mu = 10,0$ $\sigma = 0,0$	Lim sup	10,0	10,0		100	$\mu = 100340$ $\sigma = 116,5$	Lim sup	100240	100480
			Média	10,0	10,0				Média	100220	100460
			Lim inferior	10,0	10,0				Lim inferior	100200	100430

Comparação dos resultados

Uma comparação entre os resultados obtidos pela simulação matemática, com os cálculos feitos segundo o guia pode ser vista na Tabela 3. Na tabela são apresentados os limites superior e

inferior da média da simulação para 68% de abrangência e os limites extremos para um nível de confiança de 90%. Comparados aos valores obtidos de acordo com o guia. A tabela também apresenta os intervalos calculados de forma percentual.

Tabela 3 - Comparação dos métodos de determinação da incerteza

Tipo de assoc.	Incertezas				Representação gráfica das incertezas			Intervalo percentual					
		L.I. Ω	L.S. Ω	Amp. Ω									
3 Res. em paralelo	Simul.	Média	332,7	336,1	3,4				334,4 Ω \pm 0,5%				
		IC 90%	332,4	336,5	4,1				334,5 Ω \pm 0,6%				
	Guia	334,0	335,0	0,9	334,5 Ω \pm 0,1%								
					332	333	334	335	336	337	338		
10 Res. em paralelo	Simul.	Média	100,0	100,6	0,6				100,3 Ω \pm 0,3%				
		IC 90%	100,0	100,7	0,7				100,4 Ω \pm 0,3%				
	Guia	100,1	100,6	0,5	100,4 Ω \pm 0,3%								
					99,7	99,9	100,1	100,3	100,5	100,7			
20 Res. em paralelo	Simul.	Média	50,1	50,3	0,2				50,2 Ω \pm 0,2%				
		IC 90%	50,1	50,3	0,2				50,2 Ω \pm 0,2%				
	Guia	50,0	50,4	0,4	50,2 Ω \pm 0,4%								
					49,7	49,9	50,1	50,3	50,5				
100 Res. em paralelo	Simul.	Média	10,0	10,0	0				10,0 Ω \pm 0%				
		IC 90%	10,0	10,0	0				10,0 Ω \pm 0%				
	Guia	10,0	10,1	0,2	10,0 Ω \pm 0,8%								
					9,8	9,9	10	10,1	10,2				
3 Res. em série	Simul.	Média	2994,7	3025,4	30,7				3010,1 Ω \pm 0,5%				
		IC 90%	2991,8	3028,3	36,5				3010,1 Ω \pm 0,6%				
	Guia	3006,4	3014,8	8,4	3010,6 Ω \pm 0,1%								
					2960	2980	3000	3020	3040				
10 Res. em série	Simul.	Média	10011	10060	49				10035,5 Ω \pm 0,2%				
		IC 90%	10007	10065	58				10036,0 Ω \pm 0,3%				
	Guia	10009,7	10061,0	51,3	10035,3 Ω \pm 0,3%								
					9944	9984	10024	10064	10104				
20 Res. em série	Simul.	Média	20033	20105	72				20069,0 Ω \pm 0,2%				
		IC 90%	20026	20112	86				20069,0 Ω \pm 0,2%				
	Guia	19998,1	20143,2	145,1	20070,7 Ω \pm 0,4%								
					19980	20020	20060	20100	20140	20180			
100 Res. em série	Simul.	Média	100220	100460	240				100340,0 Ω \pm 0,1%				
		IC 90%	100200	100480	280				100340,0 Ω \pm 0,1%				
	Guia	99542,2	101164,5	1622,3	100353,3 Ω \pm 0,8%								
					99000	99500	100000	100500	101000	101500			

Conclusões

Observando-se os gráficos da Tabela 3 pode-se concluir que o método de cálculo de incerteza proposto pelo Guia, para a situação particular desse estudo de caso:

- 1) É menos conservador, ou seja, o intervalo de incerteza é menor, que a simulação matemática, quando o número de resistores associados é pequeno (menor do que 10), isto válido tanto para a associação paralela como para a série. As diferenças chegaram a 0,4% para menos para a incerteza calculada segundo o guia;
- 2) Para 10 resistores tanto associados em paralelo como em série, as amplitudes das incertezas são praticamente iguais;
- 3) Para mais de 10 resistores associados em paralelo ou série as incertezas indicadas pelo Guia são mais conservadoras, do que a simulação matemática, ou seja, os intervalos da incerteza são maiores. As diferenças chegaram a 0,7% a mais para a incerteza calculada segundo o guia;

Pôde-se comprovar que o método proposto pelo Guia pode ser considerado válido, para uma condição média de utilização, mas os erros podem aumentar muito quando se trabalha com casos específicos, como seria o caso de uma grande quantidade de resistores associados.

Esse artigo de maneira nenhuma esgota o assunto que deve ser explorado em novos estudos, principalmente, quanto à associação de vários tipos de distribuição, tais como Normal, Triangular, Retangular, Lognormal e outras, como seria o caso do levantamento de incertezas devido a vários fatores. Com respeito a esse assunto o professor Waeny [6] declara que não é

possível combinar desvios padrão provenientes de distribuições distintas.

Acredita-se que com o aumento da capacidade de processamento dos atuais computadores, os sistemas de simulação matemática já são viáveis e devem facilitar muito o cálculo da incerteza, fornecendo resultados bem mais confiáveis, é claro que a incerteza devido a não adequação dos efeitos incidentes exatamente a uma distribuição teórica continuará existindo.

Referências Bibliográficas

- [1] ABNT, IMETRO e SBM. **Guia para expressão da incerteza de medição**. ISBN 85-86768-03-0, 2ª Ed. Rio de Janeiro: Serifa Editoração e Informática S/C Ltda, 1998.
- [2] RELIASOFT. **Software Weibull ++ 6**. Análise de confiabilidade. Guia de treinamento. Reliasoft Brasil, 2001.
- [3] FIDÉLIS, G.;SCHOELER, N. **Curso incerteza de medição**. Fundação CERTI – UFSC: 1998.
- [4] ROHM. **Short form catalog 93 – Electronic components and devices**. 1993.
- [5] DODSON, B. **Reliability modeling with spreadsheets**. ASQ's 53rd Annual quality congress proceedings. 2000.
- [6] WAENY, J.C.C. **Estará errado o guia ISO ? Alguns problemas a serem discutidos**. II Congresso Sul-Americano de Metrologia. Sistema Paranaense de Metrologia e Ensaio – Paraná Metrologia, 1999.