



## Relatividade e Metrologia no lançamento de mísseis balísticos.

*Marcelo José Chulek<sup>1</sup>, Ricardo Casagrande Faust<sup>2</sup>, Thiago Souza Lacerda<sup>3</sup>, Vicente Machado Neto<sup>4</sup>*

<sup>1</sup>Departamento de Engenharia Eletrônica, UTFPR, Curitiba, Brasil, marcelo.chulek@gmail.com

<sup>2</sup>Departamento de Engenharia Eletrônica, UTFPR, Curitiba, Brasil, sevenscf@gmail.com

<sup>3</sup>Departamento de Engenharia Eletrônica, UTFPR, Curitiba, Brasil, tslacerda@hotmail.com

<sup>4</sup>Departamento de Engenharia Eletrônica, UTFPR, Curitiba, Brasil, vmachado@utfpr.edu.br

**Resumo** - No lançamento de mísseis balísticos intercontinentais, um relógio interno é o responsável por registrar o tempo de voo e determinar o momento em que o míssil deve detonar. Devido às altas velocidades de deslocamento e ao tempo considerável de voo, é necessário considerar os efeitos relativísticos devido à dilatação do tempo de voo. Para compensar esses efeitos é necessário realizar uma correção no tempo de voo medido pelo relógio interno do míssil. Essa correção é estimada para diversos valores de velocidade e tempo de voo, permitindo a determinação das máximas incertezas admissíveis associadas aos relógios utilizados. Por fim, são apresentados os tipos de relógio que podem ser utilizados nessa aplicação específica.

**Palavras chave:** Balística, Metrologia, Relatividade, Osciladores

**Abstract** – Concerning the launch of intercontinental ballistic missiles, an internal clock is responsible for registering the flight time and determining the exact moment of detonation. Due to the missile's high-speed movement and the considerable flight time, it is necessary consider the relativistic effects, in this situation the time dilatation. To compensate these effects it turns to be necessary to make a correction in the time of flight, as seen by the internal clock of the missile. This correction is estimated for different realistic values of speed and flight time, allowing the determination of the maximum admissible uncertainty associated with the internal clock. As a conclusion, it is presented which kind of clocks can be used in this specific case.

**Keywords:** Ballistics, Metrology, Relativity, Oscillators

### 1. INTRODUÇÃO

Os mísseis balísticos modernos são utilizados desde a Segunda Guerra Mundial, quando Alemanha nazista apresentou o míssil V-2 [1] [2]. Esses mísseis conseguem percorrer grandes distâncias sobre a superfície terrestre, sendo capazes de atingir velocidades de até 20 vezes a velocidade do som em alguns estágios do voo, o que é aproximadamente 7 km/s [1] [3]. Alguns mísseis percorrem distâncias superiores a 5500 km [3], suficiente para serem denominados intercontinentais. A trajetória descrita por esses mísseis é regida pela astrodinâmica, teoria baseada na mecânica clássica de Newton [4]. A astrodinâmica permite

determinar o instante em que um míssil balístico deve detonar de modo a atingir um determinado alvo. No entanto, esse valor de tempo é determinado para um observador localizado em um referencial localizado sobre a superfície terrestre [4]. A teoria da relatividade restrita (ou especial) apresentada por Einstein em 1905 revolucionou o mundo ao afirmar que o tempo passa mais devagar em um referencial em movimento do que para um observador localizado em um referencial “estacionário” [5]. Para um referencial em movimento, é necessário realizar uma correção relativística a fim de compensar os efeitos oriundos do movimento a altas velocidades [6]. Essa correção se trata de uma constante aditiva que deve ser realizada sobre o sistema de medição utilizado de modo a compensar o erro sistemático [7]. Para que a correção realizada não seja negligenciada, é necessário que as incertezas associadas ao sistema de medição utilizado sejam consideravelmente menores do que a correção realizada [7] [8].

### 2. OBJETIVO

Esse trabalho tem por objetivo encontrar valores realísticos para correção relativística realizada em relógios internos de mísseis balísticos. Para isso é necessário levantar uma série de especificações técnicas, tais como velocidades de deslocamento e tempo de voo. Como na prática esses valores não são constantes, trabalha-se com diversos valores de velocidade e tempo referentes aos diversos estágios do lançamento de mísseis. Outro objetivo desse trabalho é determinar quais tipos de relógios reais conseguem considerar a correção relativística. Para isso, determina-se a incerteza máxima permitida e compara-se esse valor aos valores de incerteza associadas a relógios de Quarto, Césio e Rubídio.

### 3. METODOLOGIA

Para modelar esse problema, a metodologia foi dividida em quatro partes. A primeira parte esclarece as maneiras de prever a trajetória do míssil e determinar o tempo de voo. A segunda parte determina algebricamente a correção que deve ser realizada no relógio (Sistema de Medição) de modo a compensar o erro sistemático oriundo da dilatação do tempo. A terceira parte determina quais são as incertezas máximas admissíveis para o relógio interno do míssil. A quarta parte apresenta valores reais de correção e incerteza admissível para diferentes valores de velocidade e tempo de voo. A

quinta parte apresenta as incertezas associadas a relógios reais, tais como relógios baseados em cristal de quartzo e césio.

### 3.1. Astrodinâmica

Para obter o tempo de vôo  $t$  que o míssil gasta até atingir o seu alvo, utilizam-se as equações do lançamento de projéteis da mecânica clássica, definidas através da astrodinâmica [4]. Dependendo da situação, essas equações podem incluir suposições que permitem encontrar soluções mais refinadas. Como exemplo, pode-se considerar a trajetória elíptica traçada pelo míssil devido à grande distância percorrida sobre a superfície terrestre [9]. Outra possibilidade é considerar a massa variável do míssil ao longo da sua trajetória já que existe queima de combustível durante o vôo [9]. Outra possibilidade é a correção da rotação da terra, que resulta em um descolamento de ponto de destino [4] [9]. Além dessas considerações, inúmeras outras podem ser introduzidas na resolução de modo a refinar a resolução do problema. Conhecendo-se  $t$ , é possível saber o instante em que o míssil detonará para um observador localizado no referencial terrestre. A seção 3.1 apresenta a correção que deve ser realizada nesse valor de tempo de vôo de modo a encontrar o valor de  $t'$  medido pelo relógio localizado no referencial do míssil.

### 3.2. Correção relativística

O relógio interno ao míssil é o responsável por registrar o tempo de vôo e determinar o instante em que o míssil deve detonar. Como esse relógio se encontra em um referencial em movimento, é necessário determinar o valor da correção relativística a ser realizada. Para isso é necessário fazer duas suposições:

- Os dois referenciais (míssil e terra) são inerciais, ou seja, possuem velocidade constante. Essa suposição não é verdade se considerarmos os instantes de aceleração do míssil assim como a ação da gravidade, que tende a acelerar o míssil centripetamente. No entanto, ela serve como uma boa alternativa para uma resolução simplificada do problema, já que as acelerações apresentam módulo elevado apenas em curtos intervalos de tempo [3].
- A velocidade da luz é constante em todos os referenciais inerciais [5][6].

Suponha que o míssil se move com velocidade horizontal  $v$ . Dentro do míssil, um feixe de luz é disparado perpendicularmente à direção de deslocamento. Observando-se do referencial terrestre, essa situação pode ser ilustrada conforme a Fig. 1.

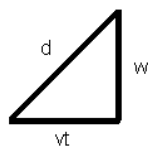


Fig. 1. Modelagem para correção relativística

Observando-se do míssil, o feixe de luz percorre a distância  $w$  enquanto que a distância observada da terra vai ser maior. Se  $t$  é o tempo que o feixe de luz leva para percorrer  $w$  e o míssil percorre a distância  $vt$  nesse tempo, a distância percorrida pelo feixe de luz para um observador localizado no referencial terrestre é, portanto:

$$d = \sqrt{w^2 + v^2 t^2} \quad (1)$$

A velocidade da luz,  $c$ , é calculada no referencial do míssil como:

$$c = \frac{d'}{t'} = \frac{w}{t'} \quad (2)$$

Onde,  $d'$  e  $t'$  são distância e tempo medidos no míssil.

Resolvendo para  $t'$  encontra-se:

$$t' = \frac{w}{c} \quad (3)$$

Assim, a velocidade da luz calculada no referencial terrestre é:

$$c = \frac{d}{t} = \frac{\sqrt{w^2 + v^2 t^2}}{t} = \sqrt{\frac{w^2}{t^2} + v^2} \quad (4)$$

Isolando-se  $t$  :

$$c^2 = \frac{w^2}{t^2} + v^2 \quad (5)$$

$$t = \frac{w}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Para encontrar a relação entre o tempo medido no míssil e na terra, procura-se  $t'/t$ :

$$\frac{t'}{t} = \frac{w}{c} \div \frac{w}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (6)$$

Assim, o tempo  $t'$  registrado pelo relógio localizado no míssil é menor do que o tempo  $t$  registrado pelo mesmo relógio localizado no referencial terrestre.

Os efeitos da dilatação do tempo aumentam com o aumento da velocidade de deslocamento e podem ser visualizados mais facilmente através da Fig. 2.

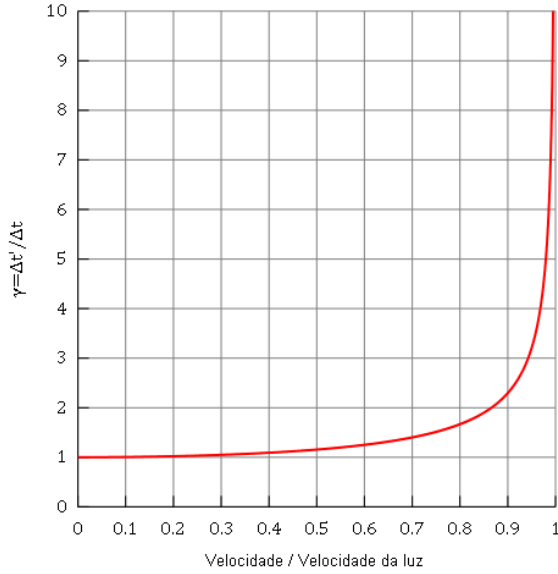


Fig. 2. Dilatação do tempo

Na Fig. 2, o eixo horizontal apresenta a relação  $v/c$  enquanto que o eixo vertical apresenta o fator de Lorentz, que é dado por:

$$\gamma = \frac{t'}{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7)$$

É possível obter a tendência do relógio interno do míssil a partir da seguinte equação:

$$Td = t' - t \quad (8)$$

$$Td = t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - t$$

A correção relativística é dada por  $C = -Td$ . Assim, a correção é dada por:

$$C = t \left( 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right) \quad (9)$$

Essa é a correção relativística que deve ser adicionada ao tempo de vôo  $t'$  medido pelo sistema de medição utilizado, no caso o relógio do míssil. É interessante notar que o valor numérico de  $C$  é positivo, o que implica em  $t' < t$ , ou, em outras palavras, que o tempo medido pelo relógio interno ao míssil é menor do que o tempo medido no referencial terrestre, como previsto anteriormente.

A necessidade da correção pode ser compreendida através do seguinte exemplo. Imagine que o míssil é programado para detonar no instante  $t = 10s$ . No entanto, o tempo passa mais devagar no referencial do míssil devido aos efeitos relativísticos. Assim, o míssil detonará mais tarde do que o esperado se nenhuma correção for realizada. Para resolver esse problema, adiciona-se o valor da correção dos efeitos relativísticos, de modo a adiantar o valor registrado pelo relógio interno ao míssil. Essa situação é ilustrada na Fig. 3.

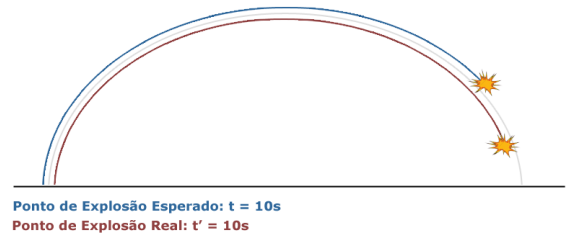


Fig. 3. Negligenciar as correções relativísticas pode resultar em uma detonação em um instante incorreto

### 3.3. Determinação da máxima incerteza admissível

Para que a correção relativística seja considerada (e conseqüentemente os efeitos relativísticos), é preciso que a incerteza do sistema de medição seja menor do que a correção realizada. Incertezas maiores do que as correções negligenciarão os efeitos relativísticos. Essa situação é ilustrada na Fig. 4.

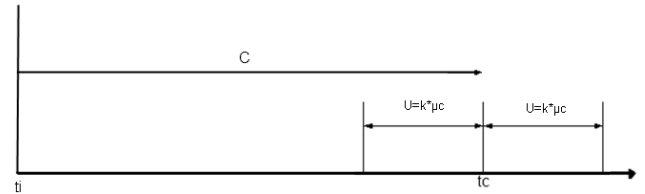


Fig. 4. Visualização da correção e incerteza

Onde:

- $\mu_c$  : Incerteza combinada
- $k$  : fator de abrangência
- $U = k \mu_c$  : Incerteza expandida
- $t_i$  : tempo indicado
- $t_c = t_i + C$  : tempo corrigido
- $RM = t_c \pm U$  : Resultado de Medição
- $C$  : correção relativística

Conhecendo-se a correção relativística, é possível especificar a incerteza máxima admissível do sistema de medição utilizado. Para isso, é preciso definir um coeficiente de segurança  $S > 0$ , o qual certifica que a incerteza expandida do relógio será menor do que as correções a serem realizadas.

$$U_{MAX} = \pm \frac{C}{S} \quad (10)$$

### 3.4. Determinação de valores reais para $C$ e $U_{max}$

A próxima parte desse estudo consiste em determinar valores reais para  $C$  e  $U_{max}$ . Como  $C(t, v)$  e  $U_{max}(t, v)$ , é necessário conhecer valores realísticos do tempo de vôo  $t$  e da velocidade média de deslocamento  $v$ .

A Tabela 1 apresenta os valores de velocidade máxima e duração de diferentes estágios do lançamento de mísseis balísticos.

Tabela 1. Fases do lançamento de mísseis intercontinentais [10]

Fase	Duração	Velocidade Máx .	Altura Máx.
Boost	~3-5 min	~7 km/s	~150-400 km
Midcourse	~ 25 min	~4-7 km/s	~1200 km
Reentry	~2 min	~4 km/s	~100 km

A fase de *Boost* é o momento em que o míssil acelera até sair da atmosfera terrestre. Nessa etapa, as velocidades podem ser de até 7 km/s. A fase de *Midcourse* é a fase intermediária do voo, tendo uma duração de aproximadamente 25 minutos. A última fase do voo, denominada reentrada, possui pequena duração e velocidades menores do que as fases anteriores. Essas fases do voo de mísseis balísticos são ilustradas na Fig. 5.

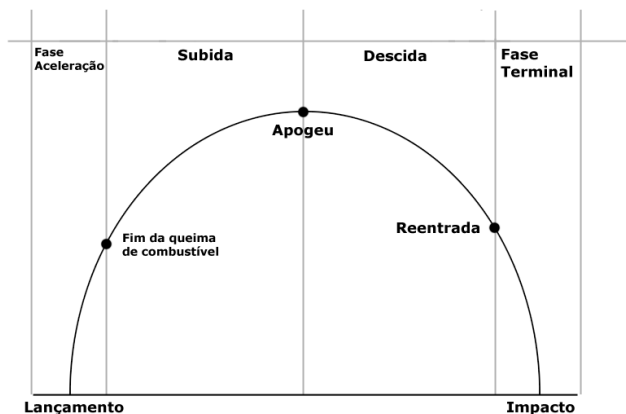


Fig 5. Estágios de voo de um míssil

Conhecendo-se a ordem de grandeza das velocidades e tempos de voo envolvidos no lançamento de mísseis balísticos, é possível determinar os valores de  $C$  e  $U_{max}$  para diferentes valores de  $v$  e  $t$ , conforme ilustrado na Tabela 2.

Tabela 2.  $C$  e  $U_{max}$  para diferentes valores de  $v$  e  $t$

$v$ (km/s)	$t$ (min)	$d$ (km)	$C$ (s)	$U_{max95\%}$ (s)
1	20	1200	6,67E-09	6,67E-10
1	40	2400	1,33E-08	1,33E-09
1	60	3600	2,00E-08	2,00E-09
2	20	2400	2,67E-08	2,67E-09
2	40	4800	5,33E-08	5,33E-09
2	60	7200	8,00E-08	8,00E-09
3	20	3600	6,00E-08	6,00E-09
3	40	7200	1,20E-07	1,20E-08
3	60	10800	1,80E-07	1,80E-08
4	20	4800	1,07E-07	1,07E-08
4	40	9600	2,13E-07	2,13E-08
4	60	14400	3,20E-07	3,20E-08
5	20	6000	1,67E-07	1,67E-08
5	40	12000	3,33E-07	3,33E-08
5	60	18000	5,00E-07	5,00E-08
6	20	7200	2,40E-07	2,40E-08
6	40	14400	4,80E-07	4,80E-08
6	60	21600	7,20E-07	7,20E-08
7	20	8400	3,27E-07	3,27E-08
7	40	16800	6,53E-07	6,53E-08
7	60	25200	9,80E-07	9,80E-08

É importante notar que os valores de  $U_{max95\%}$  foram obtidos a partir do uso de um coeficiente de segurança  $S$  igual a 10.

### 3.5. Incertezas associadas a relógios reais

Essa fase tem por objetivo determinar as incertezas associadas aos principais osciladores disponíveis para uso por relógios. A Tabela 3, retirada do livro “*The measurement, instrumentation, and sensors handbook*”, mostra valores do desvio-padrão de diferentes osciladores utilizados em relógios.

Tabela 3. Estabilidade de diferentes osciladores [11][12][13]

Tipo de Relógio	$\sigma(\tau)$ onde $\tau=1$
Quartzo (TCXO)	1E-09
Quartzo (MCXO)	1E-10
Quartzo (OCXO)	1E-12
Rúbidio	1E-12
Césio	1E-12

Os relógios TCXO, MXCO e OCXO são todos baseados na frequência de ressonância de cristais de quartzo, diferindo apenas no tipo de compensação de temperatura utilizada [11]. Os relógios de Rúbidio e Césio operam segundo a frequência das ondas emitidas nas transições de elétrons entre diferentes camadas de energia. Esses relógios são significativamente mais estáveis, como mostrados na Tabela 3.

É possível obter a incerteza expandida a 95%  $U_{95\%}$  para cada um dos osciladores por meio da seguinte equação.

$$U_{95\%} = k\sigma(1)\tau \quad (11)$$

Onde:

$U_{95\%}$  : Incerteza expandida a 95%

$k$  : Fator de abrangência para 95% ( $k = 2$ )

$\tau$  : Tempo de voo

$\sigma(1)$  : Desvio padrão para  $\tau = 1$  seg.

## 4. RESULTADOS

A Tabela 4 apresenta os valores de  $U_{95\%}$  de diferentes osciladores de para diferentes valores de  $t$  e  $v$ . Também são apresentadas as incertezas expandidas máximas permitidas  $U_{max95\%}$ .

## 5. DISCUSSÃO

A Tabela 4 permite comparar os valores das incertezas expandidas máximas admissíveis as incertezas de diversos osciladores. Para que um oscilador possa ser utilizado é necessário que sua incerteza expandida seja menor do que aquela máxima permitida. A comparação dos valores deve ser realizada para a pior situação, que ocorre quando o valor de  $C$  é máximo e negligenciá-lo acarretaria em um não acerto do alvo. No caso da Tabela 4, essa situação ocorre quando  $v = 7$  km/s e  $t = 60$  min. Nessa situação a correção relativística a ser realizada é de 9,80E-07 seg. e a incerteza máxima admissível é de 9,80E-08 seg. Comparando-se esse valor de incerteza expandida máxima com as incertezas expandidas de diversos osciladores, conclui-se que o relógio de quartzo do tipo OCXO e o relógio atômico de Césio conseguem considerar os efeitos relativísticos, pois suas incertezas expandidas são menores do que a máxima admissível. Relógios baseados nesses osciladores podem, portanto, ser utilizados no lançamento de mísseis balísticos.

**Tabela 4. Incertezas máximas de diferentes relógios e incertezas máxima permitidas**

$v$ (km/s)	$t$ (min)	$U_{\max 95\%}$ (s)	$U_{95\%}$ TCXO (s)	$U_{95\%}$ MCXO (s)	$U_{95\%}$ OCXO (s)	$U_{95\%}$ Rubídio (s)	$U_{95\%}$ Césio (s)
1	20	6,67E-10	2,40E-06	7,20E-07	2,40E-09	2,40E-09	2,40E-09
1	40	1,33E-09	4,80E-06	1,44E-06	4,80E-09	4,80E-09	4,80E-09
1	60	2,00E-09	7,20E-06	2,16E-06	7,20E-09	7,20E-09	7,20E-09
2	20	2,67E-09	2,40E-06	7,20E-07	2,40E-09	2,40E-09	2,40E-09
2	40	5,33E-09	4,80E-06	1,44E-06	4,80E-09	4,80E-09	4,80E-09
2	60	8,00E-09	7,20E-06	2,16E-06	7,20E-09	7,20E-09	7,20E-09
3	20	6,00E-09	2,40E-06	7,20E-07	2,40E-09	2,40E-09	2,40E-09
3	40	1,20E-08	4,80E-06	1,44E-06	4,80E-09	4,80E-09	4,80E-09
3	60	1,80E-08	7,20E-06	2,16E-06	7,20E-09	7,20E-09	7,20E-09
4	20	1,07E-08	2,40E-06	7,20E-07	2,40E-09	2,40E-09	2,40E-09
4	40	2,13E-08	4,80E-06	1,44E-06	4,80E-09	4,80E-09	4,80E-09
4	60	3,20E-08	7,20E-06	2,16E-06	7,20E-09	7,20E-09	7,20E-09
5	20	1,67E-08	2,40E-06	7,20E-07	2,40E-09	2,40E-09	2,40E-09
5	40	3,33E-08	4,80E-06	1,44E-06	4,80E-09	4,80E-09	4,80E-09
5	60	5,00E-08	7,20E-06	2,16E-06	7,20E-09	7,20E-09	7,20E-09
6	20	2,40E-08	2,40E-06	7,20E-07	2,40E-09	2,40E-09	2,40E-09
6	40	4,80E-08	4,80E-06	1,44E-06	4,80E-09	4,80E-09	4,80E-09
6	60	7,20E-08	7,20E-06	2,16E-06	7,20E-09	7,20E-09	7,20E-09
7	20	3,27E-08	2,40E-06	7,20E-07	2,40E-09	2,40E-09	2,40E-09
7	40	6,53E-08	4,80E-06	1,44E-06	4,80E-09	4,80E-09	4,80E-09
7	60	9,80E-08	7,20E-06	2,16E-06	7,20E-09	7,20E-09	7,20E-09

## 6. CONCLUSÃO

Os efeitos relativísticos oriundos do movimento exigem a realização de uma correção no tempo medido pelo relógio interno de mísseis balísticos. Essa correção tem por objetivo compensar a dilatação do tempo, intrínseca do movimento a altas velocidades. Assim, para que os efeitos relativísticos sejam considerados é necessário que as incertezas dos relógios utilizados sejam menores do que as incertezas máximas admissíveis, determinadas nesse trabalho. Relógios de quartzo do tipo OCXO e relógios atômicos de césio e rubídio possuem incertezas suficientemente baixas e conseguem considerar os efeitos relativísticos. Já os relógios de quartzo do tipo TCXO e MCXO não possuem incertezas baixas o suficiente para serem utilizadas nesse tipo de aplicação.

## REFERÊNCIAS

- [1] Missile Threat, “What is a ballistic missile?” Disponível em: <<http://www.missilethreat.com/overview/pageID.154/default.asp>> Acesso em: 3 de Junho de 2011
- [2] Steven J. Zaloga, Robert Calow “V-2 ballistic missile 1942-52”, 2003
- [3] RL Garwin, “Technical Aspects of Ballistic Missile Defense”, APS Forum on Physics and Society, APS - 1999
- [4] David A. Vallado, Wayne D. McClain “Fundamentals of astrodynamics and applications”, Springer, 2001
- [5] P. A. Tipler, G. Mosca, “Física para Cientistas e Engenheiros Vol. 1 e 3”, 6 ed., Editora LTC
- [6] Hans Stephani, “Relativity: an introduction to special and general relativity”, Cambridge Press, 2004
- [7] Armando Albertazzi G. Jr., André R. de Souza, “Fundamentos de Metrologia Científica e Industrial”, 1ª Edição, Manole, 2008
- [8] Jay L. Bucher, “The metrology handbook: Volume 1”, American Society for Quality, Measurement Quality Division, 2004.
- [9] Jeffrey Alan Isaacson, David R. Vaughan “Estimation and prediction of ballistic missile trajectories”, United States. Air Force, 1996
- [10] Wikipedia, “Intercontinental Ballistic Missile”, Disponível em: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Intercontinental\\_ballistic\\_missile](http://en.wikipedia.org/wiki/Intercontinental_ballistic_missile)>, Acesso em: 7 de Junho de 2011
- [11] John G. Webster, “The measurement, instrumentation, and sensors handbook”, Springer, 1999
- [12] M. Reggatin, “Atomic Clocks and Frequency Standards”, Disponível em: [www.physik.hu-berlin.de/nano/lehre/sem-mod-optikSS10/atomuhr.pdf](http://www.physik.hu-berlin.de/nano/lehre/sem-mod-optikSS10/atomuhr.pdf), Acesso em: 16 de Março de 2011
- [13] Th. Udem, R. Holzwarth e T. W. Hänsch – “Optical frequency metrology”, Nature, 2002
- [14] Physical Measurement Laboratory, “NIST-F1 Cesium Fountain Atomic Clock”, Disponível em: <<http://www.nist.gov/pml/div688/grp50/primary-frequency-standards.cfm>>, Acesso em: 7 de Junho de 2011
- [15] Grupo Estela, “Guia de preparação de Artigos”, UFSC, 2004, Disponível em: <<http://www.labcon.ufsc.br/downloads/33.pdf>>, Acesso em: 10 de Junho de 2011